

# О матрицах Грама систем равномерно ограниченных функций

Б. С. Кашин, С. Й. Шарек

В этой статье приводится доказательство теоремы, анонсированной в заметке [1]. Напомним, прежде всего, некоторые известные понятия и постановки задач и введем обозначения, используемые в дальнейшем.

Как обычно  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , – евклидово  $N$ -мерное пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и евклидовой нормой  $|\cdot|$ ,

$$B^N = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\}, \quad S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}.$$

Для набора векторов  $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i=1}^p \subset \mathbb{R}^N$  через  $G_{\mathcal{Z}}$  обозначим матрицу Грама:

$$G_{\mathcal{Z}} = \{\langle z_i, z_k \rangle\}_{i,k=1}^p.$$

Через  $O^N$  мы обозначим группу вращений пространства  $\mathbb{R}^N$ . Ясно, что для  $\sigma \in O^N$  и  $\sigma\mathcal{Z} = \{\sigma z_i\}_{i=1}^p$  имеет место равенство

$$G_{\sigma\mathcal{Z}} = G_{\mathcal{Z}}. \tag{1}$$

Ниже мы рассматриваем гильбертово пространство  $L^2(0, 1)$  и более узкое пространство  $L^\infty(0, 1)$  и через  $(\cdot, \cdot)$  обозначаем скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^1 fg \, d\mu; \quad f, g \in L^2(0, 1),$$

где  $\mu$  – мера Лебега на  $(0, 1)$ .

Наконец, определим при  $N = 1, 2, \dots$   $N$ -мерное пространство кусочно-постоянных функций:

$$D_N = \left\{ f \in L^2(0, 1) : f(x) = \text{const} = c_j \text{ для } x \in \left( \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right), 1 \leq j \leq N \right\}.$$

В анализе, геометрии и прикладных исследованиях естественно возникает вопрос о существовании для заданного набора из  $N$  векторов пространства  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ):

$$\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_N\} \subset B^N \quad (2)$$

набора функций  $\{f_j\}_{j=1}^N \subset L^\infty(0, 1)$  с равномерными нормами ограниченными абсолютной постоянной и таких, что

$$(f_j, f_k) = \langle z_j, z_k \rangle, \quad 1 \leq j, k \leq N. \quad (3)$$

Используя хорошо известное неравенство:

$$\mathcal{M} \left\{ x \in S^{N-1} : \|x\|_{\ell_\infty^N} \geq \frac{C \ln^{1/2} N}{N^{1/2}} \right\} \leq \frac{1}{N^2},$$

где  $C > 0$  – абсолютная постоянная,  $\mathcal{M}$  – нормированная мера Лебега на сфере  $S^{N-1}$ , а  $\|x\|_{\ell_\infty^N} = \max_{1 \leq i \leq N} |x(i)|$ , если  $x = \{x(i)\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ , сразу можно вывести, что для любого набора вида (2) найдется вращение  $\sigma \in O^N$  такое, что

$$\|\sigma z_j\|_{\ell_\infty^N} \leq \frac{C \ln^{1/2}(N+1)}{N^{1/2}}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Из (4), используя очевидную связь между евклидовыми пространствами  $\mathbb{R}^N$  и  $D_N$ , непосредственно получаем, что для любого набора векторов вида (2) найдутся функции  $\{f_j\}_{j=1}^N \subset D_N \subset L^\infty(0, 1)$  такие, что имеет место (3) и при этом

$$\max_{1 \leq j \leq N} \|f_j\|_{L^\infty} \leq C \ln^{1/2}(N+1). \quad (5)$$

Оценка (5) точна по порядку. Точнее, если выбрать вектора  $\{z_i\}_{i=1}^N$  таким образом, чтобы они образовывали 1 сеть (по норме  $|\cdot|$ ) на сфере некоторого подпространства  $L \subset \mathbb{R}^N$  размерности  $\dim L \geq c \ln N$ , то для любого набора функций  $\{f_j\}_{j=1}^N$  со свойством (3) имеет место неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq N} \|f_j\|_{L^\infty} \geq c_1 \ln^{1/2} N \quad (6)$$

(см., например, лемму 3 в [1]).

Представляет интерес вопрос о нахождении условий на набор (2), при которых неравенство (5) может быть уточнено и заменено оценкой:

$$\|f_j\|_{L^\infty} \leq K, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

где  $K$  – абсолютная постоянная.

Первые, частные, результаты такого рода были получены Д. Е. Меньшовым еще в тридцатые годы прошлого века в связи с задачей о продолжении системы функций, заданной на отрезке  $[-1, 0]$  до ортонормированной, равномерно ограниченной системы на  $[-1, 1]$  (см. [2]). В этой связи отметим, что остается открытым вопрос, поставленный А. М. Олевским (см. [3], стр. 58) о возможности нахождения системы функций  $\{f_j\}_{j=1}^N$  со свойствами (3), (7), в случае, когда матрица Грама набора (2) удовлетворяет неравенству

$$I_N - G_Z \geq 0$$

(здесь  $I_N$  – единичная матрица порядка  $N$ , а неравенство  $B \geq 0$  означает неотрицательную определенность квадратичной формы, порожденной симметрической матрицей  $B$ ).

Рассматриваемые в этой статье вопросы непосредственно связаны также с классическими результатами из функционального анализа о факторизации линейных операторов. Так из теорем Гротендика и Пича (см. подробнее [4], гл. 5 и, в частности, теор. 5.10) вытекает, что для любого набора  $Z$  вида (2) найдется система функций  $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^N$  с  $\|f_j\|_{L^\infty} \leq \sqrt{\pi/2}$  при  $j = 1, \dots, N$  и такая, что

$$G_Z = G_{\mathcal{F}} - \Delta, \quad \Delta \geq 0.$$

С учетом последнего результата естественно рассмотреть возможность представления матрицы Грама произвольного набора (2) в виде

$$G_Z = G_{\mathcal{F}} - \Delta, \quad \Delta - \text{диагональная матрица,}$$

где для функций системы  $\mathcal{F}$  имеет место оценка (7). Этот вопрос был поставлен также А. Мегрецким в связи с прикладными задачами квадратичного программирования (см. [5]). Оказывается, что ответ на указанный вопрос отрицательный. Имеет место

**Теорема.** *Для  $N = 1, 2, \dots$  существует такой набор  $Z = Z(N)$  вида (2), что для любой системы функций  $\{f_j\}_{j=1}^N$ , удовлетворяющей соотношениям:*

$$\langle z_j, z_k \rangle = (f_j, f_k) \quad \text{при} \quad 1 \leq j < k \leq N \quad (8)$$

справедливо неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq N} \|f_j\|_{L^\infty} \geq c (\ln N)^{1/4},$$

где  $c > 0$  – абсолютная постоянная.

**Доказательство.** Определим при  $N = 1, 2, \dots$  постоянную  $K_N$  как нижнюю грань чисел  $K$  таких, что для любого набора векторов вида (2) найдутся функции  $\{f_j\}_{j=1}^N$  с  $\|f_j\|_{L^\infty} \leq K$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , и такие, что имеет место (8). Нам надо проверить, что  $K_N \geq c (\ln N)^{1/4}$ . Определим также при  $N = 1, 2, \dots$  постоянную  $M_N$  как нижнюю грань чисел  $M$  таких, что для любого набора векторов вида (2) найдутся функции  $\{f_j\}_{j=1}^N$  с  $\|f_j\|_{L^\infty} \leq M$ ,  $j = 1, \dots, N$  такие, что имеет место (8) и

$$\langle z_j, z_j \rangle \leq (f_j, f_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Проверим, что

$$K_{2N} \geq M_N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

а затем установим, что

$$M_N \geq c' (\ln N)^{1/4}, \quad c' > 0, \quad N = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Тем самым утверждение теоремы будет обосновано. Для того чтобы проверить (10), мы для заданного набора  $\mathcal{Z}$  вида (2) построим набор векторов

$$\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_{2N}) = (z_1, z_1, z_2, z_2, \dots, z_N, z_N) \subset B^N \subset B^{2N}$$

и (см. определение величины  $K_N$ ) для данного  $\varepsilon > 0$  найдем функции  $g_1, \dots, g_{2N}$  такие, что  $(g_i, g_k) = \langle w_i, w_k \rangle$ , если  $i \neq k$  и  $\|g_i\|_{L^\infty} \leq K_{2N} + \varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, 2N$ . Тогда, в частности, для  $k = 1, 2, \dots, N$

$$|z_k|^2 = \langle z_k, z_k \rangle = \langle w_{2k-1}, w_{2k} \rangle = (g_{2k-1}, g_{2k}) \leq \|g_{2k-1}\|_{L^2} \cdot \|g_{2k}\|_{L^2},$$

то есть

$$\max \{ \|g_{2k-1}\|_{L^2}, \|g_{2k}\|_{L^2} \} \geq |z_k|, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

а значит, выбирая в качестве  $f_k$  функцию  $g_{2k-1}$  или  $g_{2k}$ , мы можем обеспечить выполнение условия (9) вместе с равенствами (8) и оценкой  $\|f_k\|_{L^\infty} \leq K_{2N} + \varepsilon$ . Тем самым неравенство (10) установлено.

*Доказательство неравенства (11).* Ниже, для набора векторов  $\{v_j\}_{j=1}^N$  в некотором евклидовом пространстве, через  $\text{span}\{v_1, \dots, v_N\}$  и  $\{v_1, \dots, v_N\}^\perp$  мы обозначаем соответственно линейную оболочку и ее ортогональное дополнение. Зафиксируем (на время произвольный) набор вида (2) и  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Выберем функции  $\{f_j\}_{j=1}^N$  с

$$\|f_j\|_{L^\infty} \leq M_N + \varepsilon, \quad j = 1, \dots, N, \quad (12)$$

так, что имеет место (8) и (9). Далее, используя очевидные изометрические вложения  $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{2N}$ ,  $B^N \subset B^{2N}$ , мы можем найти в  $\mathbb{R}^{2N}$  векторы  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , такие, что

$$\begin{aligned} u_j &\in \{z_1, \dots, z_N\}^\perp, \quad j = 1, \dots, N, \\ \langle u_i, u_j \rangle &= 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \end{aligned} \quad (13)$$

и

$$\langle u_j, u_j \rangle + \langle z_j, z_j \rangle = \langle f_j, f_j \rangle, \quad j = 1, \dots, N.$$

Полагая  $w_j = z_j + u_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , мы, в силу (13), имеем

$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle \quad \forall (i, j). \quad (14)$$

Из (14) вытекает, что отображение

$$\mathbb{R}^{2N} \supset \text{span}\{w_j, j = 1, \dots, N\} \xrightarrow{\varphi} \text{span}\{f_j, j = 1, \dots, N\} \subset L^2(0, 1)$$

корректно определяется равенствами  $\varphi(w_j) = f_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  и является изометрией. Очевидно, что это отображение может быть продолжено до изометрии между  $\mathbb{R}^{2N}$  и некоторым  $2N$ -мерным пространством в  $L^2(0, 1)$ , которую мы также обозначим через  $\varphi$ .

Пусть

$$g_j = \varphi(z_j), \quad h_j = \varphi(u_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$g_j, h_j \in L^2, \quad g_j + h_j = f_j \in L^\infty(0, 1), \quad j = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (g_i, h_j) &= 0 \quad \forall (i, j), \\ (h_i, h_j) &= 0, \quad \text{если} \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть  $L = \text{span}\{g_1, \dots, g_N\}$ . Тогда  $\varphi$  изометрично отображает на  $L$  подпространство

$$E = \text{span}\{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathbb{R}^{2N}.$$

До сих пор набор  $\{z_j\}_{j=1}^N \subset B^N \subset B^{2N}$  был произвольным. Теперь мы конкретизируем выбор векторов  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , при этом, не ограничивая общности, будем считать, что число  $N$  достаточно велико.

Пусть  $E \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{2N}$  подпространство размерности  $\ell = [c_0 \ln N]$ , где абсолютная постоянная  $c_0 > 0$  выбрана настолько малой, что на сфере  $S_E$  найдется 1 сеть (относительно евклидовой нормы  $|\cdot|$ )  $\mathcal{V} = \{v_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0}$  с числом элементов

$$\nu_0 \leq 3^\ell \leq N^{1/4} \quad (17)$$

(мы обозначаем через  $[x]$  целую часть  $x$ ). Тогда выпуклая оболочка

$$\text{conv}\{v_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0} \supset \frac{1}{2} B_E \equiv \frac{1}{2} (B^{2N} \cap E). \quad (17')$$

Повторив каждый элемент  $v_\nu$  сети  $\mathcal{V}$   $s = [N^{3/4}]$  раз и дополнив при необходимости полученный набор произвольным образом до системы из  $N$  элементов шара  $B_E$  мы построим нужный нам набор  $\mathcal{Z} = \{z_j\}_{j=1}^N$  вида (2). Используя введенные ранее обозначения, мы, в силу (17'), можем утверждать, что имеет место включение

$$\text{conv}\{g_j\}_{j=1}^N \supset \frac{1}{2} \{f \in L : \|f\|_{L^2} \leq 1\} \equiv \frac{1}{2} B_2^L \equiv \frac{1}{2} (B_2 \cap L), \quad (18)$$

где  $B_2$  – единичный шар в  $L^2(0, 1)$ . Кроме того, соотношения (12), (15), (16) гарантируют включения

$$g_j \subset (M_N + \varepsilon) P_L(B_\infty), \quad j = 1, \dots, N, \quad (19)$$

где  $P_L$  – оператор ортогонального проектирования из  $L^2(0, 1)$  на  $L$ , а

$$B_\infty = \{f \in L^2(0, 1) : \|f\|_{L^\infty} \leq 1\}.$$

Из (19) и (18) вытекает, что

$$B_2^L \subset 2(M_N + \varepsilon) P_L(B_\infty). \quad (20)$$

В свою очередь из (20) следует, что для любого элемента  $g \in L$

$$\|g\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^2} \leq 2(M_N + \varepsilon) \|g\|_{L^1} \quad (21)$$

(левое неравенство в (21) справедливо для любой  $g \in L^2$ ). Действительно, (см. (20)), если функция  $g \in L$  с  $\|g\|_{L^2} = 1$  представима в виде

$$g = f + h, \quad \|f\|_{L^\infty} \leq 2(M_N + \varepsilon), \quad h \perp g,$$

то

$$0 = (g, h) = (g, g - f) = 1 - (g, f)$$

То есть  $\|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^\infty} \geq 1$ , а значит  $\|g\|_{L^1} \geq [2(M_N + \varepsilon)]^{-1}$ , что доказывает (21).

Итак, мы имеем подпространство  $L$  в  $L^2(0, 1)$ ,  $\dim L = \ell = [c_0 \ln N]$ , для которого

1) если  $g \in L$ , то имеет место (21),

и

2) для каждого элемента  $\omega \in \Omega$  на сфере  $S_2^L = \{g \in L : \|g\|_{L^2} = 1\}$  найдутся функции  $h_{j_1}, \dots, h_{j_s} \in L^\perp$  с  $(h_{j_p}, h_{j_q}) = 0$  при  $p \neq q$  и такие, что

$$\|\omega + h_{j_p}\|_{L^\infty} \leq M_N + \varepsilon, \quad p = 1, \dots, s, \quad (22)$$

причем при  $p = 1, \dots, s$

$$\|h_{j_p}\|_{L^2}^2 = \|\omega + h_{j_p}\|_{L^2}^2 - \|\omega\|_{L^2}^2 \leq (M_N + \varepsilon)^2 - 1 \leq (M_N + \varepsilon)^2 \quad (23)$$

(в качестве  $\Omega$  следует взять множество  $\varphi(\mathcal{V})$ ). Из (22) вытекает, что

$$\left\| \omega + \frac{1}{s} (h_{j_1} + \dots + h_{j_s}) \right\|_{L^\infty} \leq M_N + \varepsilon, \quad (24)$$

а попарная ортогональность функций  $h_j$  и оценка (23) влекут:

$$\left\| \frac{1}{s} (h_{j_1} + \dots + h_{j_s}) \right\|_{L^2} \leq \frac{M_N + \varepsilon}{\sqrt{s}}. \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует, что для каждого элемента  $\omega \in \Omega$  справедливо включение

$$\omega \in (M_N + \varepsilon)B_\infty + \frac{M_N + \varepsilon}{\sqrt{s}} B_2. \quad (26)$$

Включение (26) переносится и на выпуклую оболочку сети  $\Omega$  и в итоге мы имеем (см. также (21)):

$$g \in L, \quad \|g\|_{L^2} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \|g\|_{L^1} \geq [2(M_N + \varepsilon)]^{-1} \|g\|_{L^2}, \\ g \in 2(M_N + \varepsilon)B_\infty + 2 \frac{M_N + \varepsilon}{\sqrt{s}} B_2. \end{cases} \quad (*)$$

Выведем из соотношения (\*) оценку снизу для  $M_N$ . Нам потребуется следующая элементарная и непосредственно проверяемая

**Лемма.** Пусть  $g \in L^2(0, 1)$ ,  $f \in L^\infty(0, 1)$  и  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  такие, что

$$\alpha \leq \|g\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^2} \leq 1, \quad \beta \leq \|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^\infty} \leq 1.$$

Положим

$$A = A(g, \alpha) = \left\{ t : \frac{\alpha}{3} \leq |g(t)| \leq \frac{3}{\alpha} \right\},$$

$$B = B(f, \beta) = \left\{ t : |f(t)| \geq \frac{\beta}{2} \right\}.$$

Тогда

$$\int_A |g| d\mu \geq \frac{\alpha}{3}, \quad \mu(A) \equiv \text{meas } A \geq \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2, \quad (27)$$

$$\int_B |f| d\mu \geq \frac{\beta}{2}, \quad \text{meas } B \geq \frac{\beta}{2}.$$

Пусть  $\psi_1, \dots, \psi_\ell$  – произвольный ортонормированный базис в  $L$ . Применяя только что сформулированную лемму к функциям из пространства  $L^2(0, 1)$   $\psi_r$ ,  $r = 1, \dots, \ell$ , для  $\alpha = [2(M_N + \varepsilon)]^{-1}$  находим соответствующие (см. (27)) множества  $A_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, \ell$ . Пусть

$$\Psi = \sum_{r=1}^{\ell} |\psi_r| \chi_{A_r},$$

где через  $\chi_A$  мы обозначаем характеристическую функцию множества  $A$ . Тогда

$$\|\Psi\|_{L^\infty} \leq 6(M_N + \varepsilon) \cdot \ell,$$

$$\int_0^1 \Psi d\mu \geq \frac{\ell}{6(M_N + \varepsilon)}.$$

Применяя теперь вторую часть леммы для функции  $f = \Psi[6(M_N + \varepsilon)\ell]^{-1}$  и  $\beta = [36(M_N + \varepsilon)^2]^{-1}$ , мы находим такое множество  $B \subset (0, 1)$  с  $\text{meas } B \geq [72(M_N + \varepsilon)^2]^{-1}$ , что при  $t \in B$

$$\sum_{r=1}^{\ell} |\psi_r(t)| \geq \frac{\ell}{12(M_N + \varepsilon)} \quad (28)$$

и, кроме того,

$$\int_B \sum_{r=1}^{\ell} |\psi_j(t)| d\mu \geq \frac{\ell}{12(M_N + \varepsilon)}.$$

Из (28) вытекает существование таких подмножества  $B_0 \subset B$  с мерой  $\text{meas } B_0 \geq 2^{-\ell+1} \text{meas } B \geq 2^{-\ell} \frac{1}{[6(M_N + \varepsilon)]^2}$  и набора знаков  $\varepsilon_r = \pm 1$ ,  $r = 1, \dots, \ell$ , что

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{r=1}^{\ell} \varepsilon_r \psi_r(t) \right| \geq \frac{\sqrt{\ell}}{12(M_N + \varepsilon)}; \quad t \in B_0. \quad (29)$$

Пусть

$$B_2^L \ni g(t) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{r=1}^{\ell} \varepsilon_r \psi_r(t).$$

Заметим, что в силу (29) для любой функции  $f \in 2(M_N + \varepsilon)B_\infty$

$$|g(t) - f(t)| \geq \frac{\sqrt{\ell}}{12(M_N + \varepsilon)} - 2(M_N + \varepsilon) \equiv \gamma, \quad \text{если } t \in B_0. \quad (30)$$

Проверим теперь, используя (30), что неравенство

$$(M_N + \varepsilon) \leq \frac{1}{10} [c_0 \ln N]^{1/4} = \frac{1}{10} \ell^{1/4} \quad (31)$$

противоречит (\*) и, тем самым, завершим доказательство оценки (11)

$$M_N \geq \frac{1}{10} [c_0 \ln N]^{1/4}, \quad N \geq N_0$$

Действительно, неравенство (31) влечет оценку:  $\gamma \geq \frac{1}{2} [c_0 \ln N]^{1/4}$ , а значит для любой  $f \in 2(M_N + \varepsilon)B_\infty$

$$\|g - f\|_{L^2} \geq \gamma (\text{meas } B_0)^{1/2} \geq \frac{1}{2} 2^{-\ell/2} > \frac{2(M_N + \varepsilon)}{\sqrt{s}}, \quad (32)$$

что противоречит второму из соотношений (\*). При проверке последнего из неравенств (32) мы учли, что (см. (17))  $s = [N^{3/4}]$ ,  $2^\ell < 3^\ell \leq N^{1/4}$ , а значит (см. также (5))

$$s > 20(C \ln^{1/2} N)^2 2^\ell \geq [4(M_N + \varepsilon)]^2 2^\ell,$$

если число  $N$  достаточно велико.

Теорема доказана.

В заключение нам приятно отметить, что результаты этой работы были получены во время визита первого автора в университет Париж-6, организованного при поддержке Национального центра научных исследований (Франция). Кроме того, Б. С. Кашин был поддержан грантом РФФИ НШ-1549.2003.1, С. Й. Шарек – грантом Национального научного фонда (США).

Математический институт  
им. В. А. Стеклова РАН (Б. С. Кашин)  
Université Paris VI,  
Case Western Reserve University (S. J. Szarek)

## Список литературы

- [1] *Kashin B. S., Szarek S. J.* The Knaster problem and the geometry of high-dimensional cubes// C.R. Acad. Sci. Paris, 2003, t. 336, Serie 1, P. 931–936.
- [2] *Menshoff D.* Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble// Матем. сб., 1938, т. 3, с. 103–120.
- [3] *Olevskii A. M.* Fourier Series with Respect to General Orthogonal Systems. Springer Verlag, Berlin, 1975.
- [4] *Pisier G.* Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces// CBMS Regional Conference. Series in Mathematics, 60. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1986.
- [5] *Megretski A.* Relaxation of quadratic programs in operator theory and system analysis// Systems, approximation, singular integral operators, and related topics (Bordeaux, 2000). P. 365–392. Oper. Theory Adv. Appl., 129. Birkhäuser, Basel, 2001.